МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ

ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Кафедра «Вычислительные системы и информационная безопасность»**

**ПРАКТИКУМ**

**«ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИИ В ПРИМЕРАХ»**

**Ростов-на-Дону**

**ДГТУ**

**2018**

УДК 681. 5

Составители: А.Ю. Полуян, С.Б. Петренкова

Методические указания для выполнения лабораторной работы «Теория оптимизации и исследование операции в примерах». – Ростов-на-Дону : Донской гос. техн. ун-т, 2018. – 12 с.

Описаны методы решения некоторых задач с использованием оптимизационных методов.

Предназначены обучающихся направлений подготовки 10.03.01 «Информационная безопасность», 09.03.02 «Информационные системы и технологии», 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», УДК 681. 5

Печатается по решению редакционно-издательского совета

Донского государственного технического университета

Научный редактор канд. техн. наук, доцент А.И. Зотов

Ответственный за выпуск зав. кафедрой «Вычислительные системы

и информационная безопасность» д-р техн. наук, профессор В.А. Фатхи

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

В печать 28.09.2018 г.

Формат 60×84/16. Объем 0,8 усл. п. л.

Тираж 50 экз. Заказ № 740.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Издательский центр ДГТУ

Адрес университета и полиграфического предприятия:

344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

© Донской государственный

технический университет, 2018

**Тема № 1**

**«Безусловный экстремум функции двух переменных»**

**(методические указания)**

**Цель лабораторной работы:** Исследование стационарных точек функции двух переменных, определяемых аналитическим методом

**Задание:** Для функции ***f(x,y)*** и уравнения связи ***g(x,y)=0*** найти аналитическим методом:

1) координаты стационарных точек функции ***f(x,y),*** воспользовавшись необходимыми условиями экстремума с проверкой результатов решения уравнений;

2) определить вид каждой из стационарных точек (максимум, минимум, нет экстремума), воспользвавшись достаточными условиями экстремума.

При несоблюдении требований правила проверки достаточного условия (***B2 – АС = 0,***разные знаки у ***А*** и ***С*** и т.д.)указать, по какой причине заключение о характере соответствующей стационарной точки сделать нельзя.

При выполнении преобразований делать максимальные упрощения с использованием правильных дробей, а все конечные численные значения координат и значений функций указывать в десятичной форме с округлением дробной части до трёх знаков (например, вместо 5/3 записать 1,66(6), а вместо  значение 2,628);

3) Результаты выполнения задания оформить в виде отчёта о лабораторной работе.

**ПРИМЕР:**

*f(x,y)=2x3+xy2+5x2+y2*

1. **Определение координат стационарных точек**

 (1)

 (2)

Так как из (2) следует, чтото

либо  либо .

Подставляя оба эти значения в (1), получаем



откуда 



при этом  Проверка:

;



Таким образом, имеем 4 стационарные точки (результаты указаны в десятичной форме с округлением дробной части до трёх знаков):





**2. Определение вида стационарных точек**







в точке *(0,0)*:   Здесь ; значит  является точкой экстремума, а так как *А* и *С* положительны, то точкой минимума;

значение *f(0,0) = 2x3+xy2+5x2+y2 = 0*;

в точке *(–1,667;0):*

, 



Так как

,

то рассматриваемая точка является точкой экстремума, а так как *А* и *С* отрицательны, то точкой максимума;

Значение функции

*f(**;0)=2x3+xy2+5x2+y2 =2*+*5**= 4,630*

в точке *(-1,2)*:   Так как  в рассматриваемой точке нет экстремума;

значение *f(*–*1,2) = 2x3+xy2+5x2+y2 = 3*;

в точке *(*–*1,*–*2)*:   Так как  в рассматриваемой точке нет экстремума;

значение *f(*–*1,* –*2) = 2x3+xy2+5x2+y2 = 3*

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2**

**«Условный экстремум функции двух переменных»**

**Цель лабораторной работы:** Исследование особенностей определения условного экстремума функции двух переменных методом множителей Лагранжа

**Задание:** Для функции ***f(x,y)*** и уравнения связи ***g(x,y)=0:***

1) найти аналитически методом множителей Лагранжа координаты и вид условных экстремумов функции ***f(x,y)*** для указанного уравнения связи ***g(x,y)=0,*** а также значения функции в точках условного экстремума

При выполнении преобразований делать максимальные упрощения с использованием правильных дробей, доводя решаемое уравнение до записи с целочисленными коэффициентами. Конечные численные значения указать в десятичной форме с округлением дробной части до трёх знаков (например, вместо 5/3 записать 1,66(6), а вместо  значение 2,628).

2) результаты выполнения задания оформить в виде

отчёта о лабораторной работе (без приводимых далее дополнительных текстовых пояснений).

**ПРИМЕР:**

***f (x,y)=2x3+xy2+5x2+y2* ; *g(x,y)=3x+4y – 1=0.***

**1. Составляем вспомогательную функцию**

***Ф(х,у)= f(x,y)+λ* g*(x,y)= 2x3+xy2+5x2+y2+λ(3x+4y*–*1).***

**2. Приравниваем частные производные *Ф (х, у)* по *x* и по *y* нулю**



**2.1. Исключаем *λ*:**

Так как, получаем уравнение



|  |
| --- |
|  |

**3. Полученное уравнение совместно с уравнением связи**

Получаем из уравнения связи ***g(x,y)=3x+4y–1=0*** значение и подставляем в полученное уравнение:



|  |
| --- |
|  |

Сделать максимальные упрощения с использованием для сохранения точности правильных дробей и получением квадратного уравнения с целочисленными коэффициентами):



(×6)



↓



или .



Отсюда

.



Следовательно,



.



**4. Определяем вид экстремумов**

Рассматриваемая функция ***f(x,y)=2x3+xy2+5x2+y2***третьего порядка, то есть имеет один минимум и один максимум. С учётом этого обстоятельства можно избежать аналитических преобразований и определить вид экстремумов в точках условного экстремума, сравнив значения функции в этих точках:

***f(x4,y4) = 2+1,2842+5+1,2842= 3,638;***



***f(x5,y5) =2+0,2882+5+0,2882= 0,058.***



Таким образом:

в точке ***(x4,y4)* максимум,**

в точке ***(x5,y5)* минимум.**

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3**

**«Элементарная задача вариационного исчисления»**

**Цель работы:** закрепление навыков аналитического решения задач оптимизации с использованием метода множителей Лагранжа

**Задание:** Для заданного функционала при указанных граничных условиях**:**

1) Найти экстремаль (аналитическое выражение) с проверкой частного решения дифференциального уравнения, полученного приуказанных граничных условиях

Примечания: результаты решения линейного однородного дифференциального уравнения (в частности, выражения с корнями), а также все окончательные результаты представлять десятичными числами с точностью до трёх знаков; проверить решения дифференциального уравнения (отклонение от 0 должно быть не более 0,01 – менее 1%).

2) Результаты выполнения задания оформить в виде отчёта о лабораторной работе.

**ПРИМЕР:**

 .



**Алгоритм выполнения задания:**

1. Cоставим уравнение Эйлера ()



1.1. Исходя из , получим  и



1.2. Запишем выражение для полной производной , учитывая, что :



1.3. Подставим полученные выражения для **и**  в уравнение Эйлера **() :**



**,** или после упрощения



2. Решить уравнение Эйлера

2.1. Анализ уравнения

Полученное уравнение является линейным дифференциальным второго порядка, однородным (без правой части), с постоянными коэффициентами – [4], с. 589.



Решение такого уравнения ищется с использованием корней характеристического уравнения.

В общем случае для дифференциального уравнения *=* ***0*** характеристическое уравнение имеет вид ([4], с.с. 587–588), а общее решение дифференциального уравнения ***у*** *=* ***С1 + С2 .***



В данном случае дифференциальное уравнение характеристическое уравнение корни характеристического уравнения общее решение дифференциального уравнения



;



***r1 = 1;***  ***r2 = –1****,*

***у*** *=* ***С1 + С2***



2.3. Проверка подстановкой *С1* и *С2* в (2) и (3)

***С1·+ С2· =/2,718+0,273·2,718 =0,258+0,742=1,***



***С1·+С2·=·2,718+0,273/2,718=1,905+0,1= 2.005***



отклонение менее 1 %

2.4. Аналитическое выражение, описывающее экстремаль

***у*** *=* ***С1 + С2*** *=* ***+ 0,273***.



**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4**

# «Экстремаль функционала, зависящего от двух функций»

**Цель лабораторной работы:** закрепление навыков решения задачи нахождения экстремалей функционала, зависящего от двух функций

**Задание:** Для нахождения экстремалей заданного функционала, зависящего от двух функций, при указанных граничных условиях**:**

1) составить систему уравнений Эйлера

2) в порядке решения системы дифференциальных уравнений Эйлера получить систему линейных уравнений.

**ПРИМЕР**



**Алгоритм выполнения задания:**

1. Составим систему уравнений Эйлера при заданных исходных данных

1.1 Общий вид системы уравнений

**** 

1.2 Находим частные производные,, **и** 









1.3 Вычислим полные производные

1.4.1 Вспомним выражения для полных производных:





1.4.2 Вычислим частные производные (с учётом того, что, как уже показано в п.1.1, )





1.4.3 Значения полных производных



1.5. Подставим все полученные значения в систему уравнений Эйлера общего вида, при этом получим искомую систему уравнение Эйлера

****

2. Решение системы уравнений Эйлера

2.1. Предварительные преобразования

Из первого уравнения полученной системы **** следует, что . После подстановки во второе уравнение системы получаем



или после упрощений



Выполняя аналогичные преобразования относитель­но другой функции, получаем , а после подстановки

 и 

Таким образом, приходим к эквивалентной системе уравнений

****

2.1. Анализ уравнений системы

Полученные уравнения являются дифференциальными четвёртого порядка, однородными (без правой части), линейными, с постоянными коэффициентами, потому решение обоих уравнений ищется с использованием корней характеристического уравнения.

В общем случае для дифференциального уравнения четвёртого порядка  характеристическое уравнение имеет вид

,

а его решениями являются

***r1 = ,***  ***r2 = –****,* ***r3 = i***и ***r4 = – i,***

общее решение дифференциального уравнения имеет вид

***у*** *=* ***С1  + С2 + С3 cos******x + С4 sin******x .***

Корнями характеристического равнения являются ***r1 = 1,*** ***r2 = –1****,* ***r1 = i*** и

***r2 =–i,***поэтому общими решениями системы дифференциальных уравнений будут

***у*** *=* ***С1  + С2 + С3 cos x + С4 sin x,***

***z*** *=* ***С1  + С2 + С3 cos z + С4 sin z .***

2.2. Найдём частное решение по указанным граничным условиям

 и 

Пользуясь соотношениями для общих решений, составим систему уравнений относительно ***С1 ,С2 , С3 ,С4 :***

***1*** *=* ***С1  + С2 + С3 cos (–2) + С4 sin (–2),***

***0*** *=* ***С1  + С2 + С3 cos 2 + С4 sin 2,***

***0****=* ***С1  + С2 + С3 cos (–2) + С4 sin(–2),***

***2****=* ***С1  + С2 + С3 cos 2+ С4 sin 2.***

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5**

**«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

**ГРАФИЧЕСКИ И АНАЛИТИЧЕСКИ»**

**Цель лабораторной работы:** исследование способов решения задачи линейного программирования

**Задача:** Найти максимум целевой функции ***Ф = k1 x1+ k2 x2***при ограничениях(- один из знаков **≤ , ≥**)



***a11 x1 + a12 x2 b1 , a21 x1 + a22 x2 b2 ,***



**1 ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ**

1.1 Вычислить точки пересечения линий ограничений с осями декартовой системы координат.

1.2 Построить график с изображением линий ограничений в декартовой системе координат.

1.3 Определить многоугольник ограничений

1.4 Построить линию уровня целевой функции, проходящую через точку **(*0,0*)**

1.5. Провести линию уровня, соответствующую ***max***, и найти значение экстремума целевой функции (ЦФ)

1.6. Записать ограничения и найти значение экстремума для многоугольника ограничений, прилегающего к началу координат, а также координаты точек пересечения с осями линии уровня, соответствующей ***max***.

**2 АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ**

6. Найти решение для исходных ограничений задачи, используя способ перевода свободной переменной в базисные со всеми возможными попытками получения ДБР.

**Примечание: числа, не являющиеся целыми, представлять правильными дробями**

**ПРИМЕР:**

***Ф = 4x1 + 5x2 → maх,***

***2x1 + x2* ≥ *22***

***x1 + 2x2* ≤  *20***

**1 ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ**

1.1 Точки пересечения линий ограничений

***2x1 + x2 = 22*:**

***x2 = 22 – 2x1***: ***x1 = 0 →*** ***x2 = 22***,

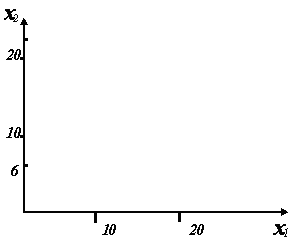
***x2 = 0*** ***→ x1 = 11;***

***x1 + 2x2 = 20*:**

***x2 = ( 20 – x1 )/2***: ***x1 = 0 →*** ***x2 = 10***,

***x2 = 0*** ***→ x1 = 20.***

* 1. График



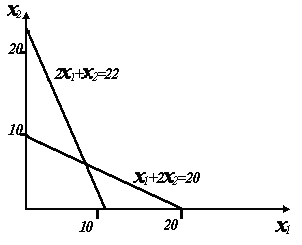
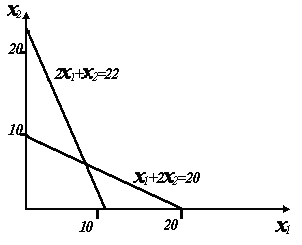
**рафик **

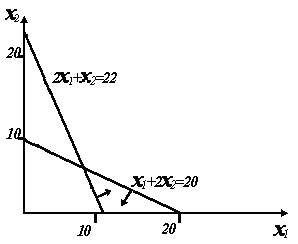
График с линиями ограничений

****

1.3 Многоугольник ограничений отметить стрелками

т.к. ***2x1 + x2 ≥ 22,*** полуплоскость ниже этой линии

т.к. ***x1 + 2x2 ≤ 20,*** полуплоскость выше этой линии



Пояснения:

Так как точка (0,0) удовлетворяет рассматриваемому

неравенству ***2x1 + x2 ≥ 22,*** приходим к выводу, что ограничению неравенства удовлетворяют точки полуплоскости, расположенные выше этой линии ограничений.

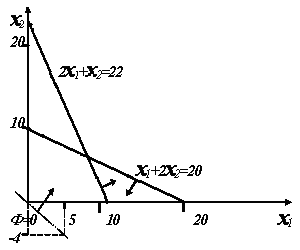
Так как точка (0,0) не удовлетворяет рассматриваемому неравенству ***x1 + 2x2 ≤ 20,*** приходим к выводу, что ограничению неравенства удовлетворяют точки полуплоскости, расположенные ниже этой линии ограничений.

С учётом того, что ***x1 ≥ 0*** и ***x2 ≥ 0,*** отмечаем область ограничений стрелками, указывающими направления, соответствующие полуплоскостям, в которых удовлетворяются ограничения. Максимум ЦФ в находится одной из угловых точек образовавшегося треугольника ограничений)

* 1. Линия уровня целевой функции, проходящая через точку (*0,0*):

***Ф = 4x1 + 5x2 = 0***

Пояснение: подставив в выражение для линии уровня, например, ***x1 =5,*** получаем  ***x2 = – 4x1 /5 = – 4·5/5 = – 4***, то есть что рассматриваемая линия уровня проходит через точку (***5, – 4***) – проводим такую линию:

****

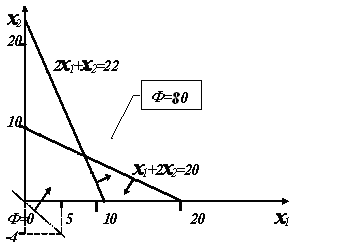
1.5 Провести линию уровня, соответствующую *max, и найти maxФ*

Пояснения:

Определяем в каком направлении необходимо перемещать линию уровня параллельно себе самой, чтобы значение ***Ф=0,*** чтобы значение ЦФ возрастало.

Поскольку коэффициенты при ***x1***  и ***x2***  в выражении для целевой функции положительны, то увеличение ***Ф*** будет происходить при увеличении ***x1*** и ***x2*** , т.е. ***Ф*** необходимо перемещать вправо и вверх – см. график.

очевидно, что в рассматриваемой области ограничений ***maxФ*** **=** ***Ф(20,0) = 4·20 + 5·0 = 8 –*** изобразить соответствующую линию уровня с указанием в выноске ***Ф =80***.



1.6 Решение для многоугольника ограничений, прилегающего к началу координат

Запись ограничений:

***2x1 + x2* ≤*22***

***x1 + 2x2* ≤ *20***

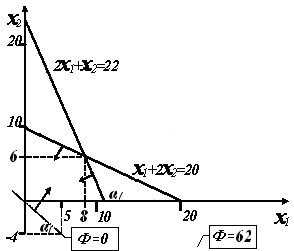
Для нахождения значения экстремума найдем координаты точки пересечения линий ограничения, записанных в виде ***2x1 + x2*** – ***22*** = 0 и ***x1 + 2x2*** – ***20*** = 0. Исходяиз того, что ***2x1 + x2*** – ***22*** = ***x1 + 2x2*** – ***20 ,*** в результате упрощения последнего равенства получаем ***x2*** = ***x1*** – ***2.***

Поставив ***x2*** = ***x1*** – ***2*** в любое выражение для линии пересечения, получим 3 ***x1*** – 24 = 0, и, таким образом, координаты точки экстремума ***x1***=8, ***x2*** = ***x1*** – ***2*** = 6.

Следовательно, в данном случае

***maxФ*** **=** ***Ф(8,6) = 4·8 + 5·6 = 62***.

Линии ограничений и линия уровня целевой функции, проходящая через точку (*0,0*) – прежние, однако многоугольник ограничений другой (отметим новыми малыми стрелками). Изобразим линию уровня, проходящую через точку экстремума, укажем на графическом изображении для линии уровня в выноску с надписью ***Ф =62***



Определим координаты точек пересечения с осями линии уровня, соответствующей ***maxФ*** **=*62***, воспользовавшись вычислениями с использованием ***tgα=*** (см. рисунок)***.***



Как видно из рисунка, координаты точки пересечения линии уровня ***maxФ*** **=*62*** с осью ***x1*** равны

(***8*** + ***6 / ,0) =(15,0),***



в то время как координаты точки пересечения с осью ***x2***

(***0,6***+***15,0) ==(0,12)***



**2 АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ**

решение для исходных ограничений

***2x1 + x2* ≥*22***

***x1 + 2x2* ≤ *20***

2.1 Получение и проверка базисного решения

Приведём неравенства к равенствам(путём введения дополнительных переменных)

***2x1 + x2 – x3 = 22***

***x1 +2x2 + x4 = 20***

Найдем БР(в базисе дополнительных переменных***х3, х4*** )

***x3 = – 22 + 2x1 + x2***

***x4 = 20 – x1 – 2x2***

(при этом свободными являются переменные ***x1*** и ***x2***)***.***

**Анализ БР:**

не ДБР (вследствие наличия отрицательного свободного коэффициента во втором уравнении)

2.2 Приведение БР к ДБРвсеми возможными попытками.

Пояснение: при двух свободных переменных и двух уравнениях возможны 4 попытки.

1) перевод ***x1*** в первом ур. (уравнении):

***x3 = – 22 + 2x1 + x2 →x1 =*( *22 +x2 – x3*) *= 11 –x2 +x3***



***x4 = 20–x1 – 2x2 = 20 –* (*11 – x2 –x3*) *– 2x2* = *9 –x 2 –x3***



ДБР (свободные коэффициенты неотрицательны во всех уравнениях).

Проверка ДБР на оптимальность: выразим целевую функцию ***Ф = 4x1 + 5x2***через свободные переменные ***x2*** и ***x3*,** принимая во внимание, что в ДБР

***x1 =11 –x2 +x3***



***Ф = 4*(*11 –x2 +x3*)*+5x2 = 4 x1+5 x2 =44+3x2 +2x3 .***



**ДБР** не оптимально (при поиске максимума свободные переменные со знаком +).

2) ***x2*** в первом ур.

***x3 = – 22 + 2x1 + x2 → x2 = 22 – 2x1 + x3***

***x4 =20–x1 – 2x2 = 20 – x1 – 2*(*22 – 2x1 + x3*)=*–24+3x1 –2x3***

**не ДБР** (вследствие наличия отрицательного свободного коэффициента во втором уравнении).

3) ***x1*** во втором ур.

***x3 = – 22 + 2x1 + x2=22 +2*(*20 –2x2 – x4*) *+ x2 = 18 – 3x2 – 2x4***

***x4 = 20–x1 – 2x2 → x1 = 20 – 2x2 – x4***

Проверка ДБР на оптимальность (выразим ЦФ ***Ф = 4x1 + 5x2***через свободные переменные ***x1*** и ***x3***, принимая во внимание, что в ДБР ***x1 = 20 – 2x2 – x4***)

***Ф = 4x1 + 5x2 =4*(*20 – 2x2 – x4*) *+ 5x2 =80 – 3 x2 – 4x4***

ДБР оптимально (при поиске максимума свободные переменные со знаками минус

***maxФ =80*** совпадает с графическим решением

4) ***x2*** во втором ур.

***x3 =–22 +2x1+x2=–22+2x1 +*(*10 – x1 –x4*) =*–12+x1 –x4***



***x4 = 20–x1 – 2x2 → x2 =* (*20 – x1 – x4* )*=10 – x1 –x4***



**не ДБР** (вследствие наличия отрицательного свободного коэффициента в первом уравнении).

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6**

**«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

**СИМПЛЕКСНЫМ МЕТОДОМ»**

**Цель лабораторной работы:** исследование способов решения задачи линейного программирования

**Задача: Найти максимум целевой функции *Ф = k1 x1+ k2 x2*при ограничениях**

***a11 x1 + a12 x2 b1 ,***



***a21 x1 + a22 x2 b2 ,***



(- один из знаков **≤ , ≥**)



1) Найти решение для ограничений, соответствующих заданию, начиная с перевода в базисные переменной наиболее простым способом (с наименьшим коэффициентом)

2) Найти решение для ограничений, соответствующих многоугольнику, прилегающему к началу координат, начиная с перевода в базисные переменной ***x1***

**Примечание: числа, не являющиеся целыми, представлять правильными дробями**

**ПРИМЕР:**

***Ф = 4x1 + 5x2 → maх,***

***2x1 + x2* ≥ *22***

***x1 + 2x2* ≤ *20***

1 Решение для исходных ограничений

1.1 *Получение допустимого базисного решения и проверка его на оптимальность*

1.1.1 Приведём неравенства к равенствам (путём введения дополнительных переменных)

***2x1 + x2 – x3 = 22***

***x1 +2x2 + x4 = 20***

1.1.2Найдем БР(в базисе дополнительных переменных***х3, х4***)

***x3 = – 22 + 2x1 + x2***

***x4 = 20 – x1 – 2x2***

1.1.3Анализ БР

Базисное решение является недопустимым вследствие отрицательности базисной переменной ***x3 = –20.***

*1.2 Приведение базисного решения к допустимому виду*

1.2.1 Перевод наиболее простым способом в базисные свободной переменной (с наименьшим коэффициентом), входящей в уравнение с отрицательным свободным членом (1-е уравнение) с положительным знаком. Это переменная ***x2***

***x3 = – 22 + 2x1 + x2 → x2 = 22 – 2x1 + x3***

***x4 =20 – x1 – 2x2 = 20 – x1 – 2*(*22 – 2x1 + x3*)= *– 24+3x1 – 2x3***

не ДБ**Р** (вследствие наличия отрицательного свободного коэффициента во втором уравнении).

1.2.2 Ввиду неудачности попытки переведём в базисные в 1-м уравнении переменную ***x1***:

***x3 = – 22 + 2x1 + x2 →x1 =*( *22 –x2 + x3*) *= 11 –x2 +x3***



***x4 = 20 – x1 – 2x2 = 20 –* (*11 – x2 +x3*) *– 2x2* = *9 –x 2 –x3***



ДБР (свободные коэффициенты неотрицательны во всех уравнениях).

Проверка ДБР на оптимальность: выразим целевую функцию ***Ф = 4x1 + 5x2***через свободные переменные ***x2*** и ***x3*,** принимая во внимание, что в ДБР

***x1 =11 –x2 +x3***)



***Ф = 4*(*11 –x2 +x3*)*+5x2 = 4 x1+5 x2 = 44+3x2 +2x3 .***



ДБР не оптимально (при поиске максимума свободные переменные со знаком плюс).

1.3. Для улучшения ДБР сделаем симплекс шаг

Переведем в базисные свободную переменную,входящую в целевую функцию с положительным знаком, а в уравнения ограничений с отрицательным знаком. Это переменная ***x2***, входящая с отрицательным знаком в оба уравнения.

1.3.1 Определяем уравнение, из которого переменную *х2* следует перевести в базисные

***x1 = 11 –x2 +x3 , +, b1=11/|| = 22***



***x4 = 9 –x 2 –x3 , +, b2=9/|–| = 6***



1.3.2 Получаем новое ДБР(переменную ***x2*** переводим из второго уравнения с меньшим значением ***bi*** и соответственно этому, базисная переменная ***x4*** этого уравнения переводится в свободные)

***x1 =11 –x2 +x3 =11 –***(***6 –x3 – x4***)***+x3 = 8+x3+x4***



***x4 = 9 –x 2 –x3 → x2 =* (*9 –x3 – x4*)*= 6 –x3 – x4***



1.3.3Проверка ДБР на оптимальность (выразим целевую функцию через свободные переменные ***x3*** и ***x4 ,***принимая во внимание, что ***x1 = 8 +x3+x4*** и ***x2 = 6 –x3 – x4***)



***Ф = 4x1+5x2 =4***(***8+x3+x4***)***+5***(***6 –x3 – x4***)***= 62 + x3 – 2x4***



ДБР не оптимально(при поиске максимумасвободная переменная***x3*** в ЦФ со знаком плюс).

1.4 Для улучшения ДБР сделаем симплекс шаг

Переведем в базисные переменную ***х3*** *,* имеющую в целевой функции знак плюс.

1.4.1 Определяем уравнение, из которого переменную *х3* следует перевести в базисные.

Переменная *х3* входит с отрицательным знаком только в одно второе уравнение.

1.4.2 Получаем новое ДБР(переменную ***x3***переводим из второго уравнения, соответственно этому, базисная переменная ***x4*** этого уравнения переводится в свободные)

***x1 = 8+x3+x4 = 8 +***(***18 – 3x2 – 2x4***)***+x4 =20 – 2x2 – x4***



***x2 = 6 –x3 – x4 → x3 =3***(6 ***– x2 – x4*** ) ***= 18 – 3x2 – 2x4***



***ч***

1.4.3 Проверка ДБР на оптимальность выразим ЦФ через свободные переменные

***Ф = 4x1 + 5x2 = 4·***(***20 – 2x2 –x4***)***+ 5x2 = 80 – 8x2  – 4x4 + 5x2 = 80 – 3x2 – 4x4***

ДБР оптимально (при поиске ***max*** свободные переменные в ЦФ со знаком минус

***maxФ*** =***80*** совпадает с графическим решением

2 Решение для ограничений, соответствующих многоугольнику, прилегающему к началу координат

2.1 Запись ограничений

***2x1 + x2* ≤ *22***

***x1 + 2x2* ≤  *20***

2.2 Получение допустимого базисного решения и проверка его на оптимальность

2.2.1 Приведём неравенства к равенствам(путём введения дополнительных переменных)

***2x1 + x2 + x3 = 22***

***x1 +2x2 + x4 = 20***

2.2.2 Найдем БР(в базисе дополнительных переменных***х3, х4***)

***x3 = 22 – 2x1 – x2,***

***x4 = 20 – x1 – 2x2,***

при этом свободными являются переменные ***x1*** и ***x2***

2.2.3 Анализ БР

ДБР (вследствие не отрицательности свободных коэффициентов во всех уравнениях)

Проверка на оптимальность ***Ф = 4x1 + 5x2***

ДБР не оптимально(при поиске максимумасвободные переменные в ЦФ со знаками плюс.

2.3. Для улучшения ДБР сделаем симплекс шаг

Переведем в базисные переменную ***х1***

2.3.1. Определяем уравнение, из которого переменную *х1* следует перевести в базисные

***x3 = 22 – 2x1 – x2 , +, b1=22/|–2| = 11***

***x4 = 20 – x1 – 2x2 , +, b2=20/|–1| = 20***

2.3.2 Получаем новое ДБР(переменную ***x1*** переводим из первого уравнения с меньшим значением ***bi*** и соответственно этому, базисная переменная ***x3*** этого уравнения переводится в свободные)

***x3 = 22 – 2x1 – x2 → x1 =*** (***22 – x2 – x3*** ) ***=11 –*** ***x2 – x3***



***x4 = 20 –*** (***11 – x2 –*** ***x3* ) *– 2x2 = 9 –x2 + x3***



2.3.3 Проверка ДБР на оптимальность (выразим целевую функцию через свободные переменные ***x2*** и ***x3 ,***принимая во внимание, что ***x1 =11–1/2x2–1/2x3*)**

***Ф = 4x1+5x2 = 4*** (***11 –x2 – x3*** )***+5x2 = 44 + 3x2 – 2x3***



ДБР не оптимально(при поиске максимумасвободная переменная ***x2*** в ЦФ со знаком плюс).

2.4 *Для улучшения ДБР сделаем симплекс шаг*

Переведем переменную ***х2****,* имеющую в целевой функции знак плюс, в базисные.

2.4.1 Определяем уравнение, из которого переменную *х2* следует перевести в базисные

***x1 = 11 – x2 – x3 +, b1 =11/ = 22***



***x4 = 9 –x2 + x3 +, b2 =9/ = 6***



2.4.2 Получаем новое ДБР(переменную ***x2***переводим из второго уравнения с меньшим значением ***bi*** и соответственно этому, базисная переменная ***x4*** этого уравнения переводится в свободные)

***x1 = 11–*** (***6 + x3 –x4*** )***– x3 = 8 –x3 + x4***



***x4 = 9 –x2 + x3 → х2 =***(***9+ x3 – x4***)***= 6 + x3 –x4***



2.4.3 Проверка ДБР на оптимальность (выразим целевую функцию через свободные переменные ***x3*** и ***x4 ,*** принимая во внимание, что ***x1 =8 –x3 + x4*, *x2 =6 + x3 –x4*)**



***Ф = 4x1 + 5x2 = 4·(8 – x3 + x4 )+ 5(6 + x3 – x4 )=***



***= 32 – x3 + x4 + 30 +x3 – x4 = 62– x3 – 2x4***



ДБР оптимально (при поиске max свободные переменные в ЦФ со знаком минус)

***maxФ* =*62***совпадает с графическим решением.

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7**

**“Решение транспортной задачи**

**по критерию стоимости”**

**Цель лабораторной работы:** Закрепление навыков аналитического решения транспортных задач

**Задача:** Дано:

*a1* и*a2* – количество продукции в двух пунктах хранения с номерами *i =1, 2*;

*b1,b2* и*b3* – количество продукции, которое требуется перевезти в три пункта назначения *j = 1, 2, 3*;

***сij****=z****ij*** – стоимость перевозки продукции из *i*-го пункта хранения в *j* -й пункт назначения.

Задача является сбалансированной: *.*



Требуется найти план, обеспечивающий минимизацию стоимости перевозок:

***f* = *c11х11*+ *c12х12*+ *c13х13*+ *c21 х21*+ *c22х22*+ *c23х23→min***

1) при построении опорного плана методом северо-западного угла;

2) при построении опорного плана с использованием «жадного» алгоритма*.*

**ПРИМЕР:**

***a1* = *20, a2* = *40, b1* = *15, b2* = *10, b3* = *35,***

***с11= 8, с12= 6, с13= 2, с21= 7, с22= 3, с23= 5***

1. С построением плана методом северо-западного угла

1.1. Транспортная матрица

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | ***15*** | ***10*** | ***35*** |
| ***20*** | ***8*** | ***6*** | ***2*** |
| ***40*** | ***7*** | ***3*** | ***5*** |

***u1=***

***u2=***

***v1= v2= v 3=***

1.2. Построение опорного плана методом северо-западного угла, вычисление потенциалов строк и столбцов (курсивом указаны пояснительные надписи, характеризующие вариант реализации способа и порядка вычисления потенциалов строк и столбцов)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ***15*** | | ***10*** | ***35*** |
| ***20*** | ***8***  ***1)15*** | | ***6***  ***2)5*** | ***2*** |
| ***40*** | ***7*** | | ***3***  ***3)5*** | ***5***  ***4)35*** |
|  | | ***v1=8*** | ***v2=6*** | ***v 3=8*** |  |

*ui + vj = cij,**u1=0, u2= –3****,***

*u1+v1=8****, u1=0*** *v1 =8–u1=8,*

*u1*+*v2=6****,*** *v2=6–u1=6,*

*u2*+*v2=3****, u2= –3*** *u2=3–v2= –3,*

*u2*+*v3=5****.*** *v3=5–u2=8*.

1.3. Вычисление потенциалов свободных клеток, оценка оптимальности плана и значения целевой функции

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ***15*** | ***10*** | ***35*** |  |
| ***20*** | ***8***  ***15*** | ***6***  ***5*** | ***2*** | ***u1= 0*** |
| ***40*** | ***7***  ***2*** | ***3***  ***5*** | ***5***  ***35*** | ***u2= – 3*** |
|  | ***v1=8*** | ***v2=6*** | ***v 3=8*** |  |

***dij* = *cij – ui – vj : d13* =*2 – 0 – 8 = – 6, d21* =*7– (–3) – 8=2.***

Так как ***d13= – 6 <0 ,*** план не оптимален,

***f = 8*×*15+6*×*5+3*×*5+5*×*35 = 340.***

1.4. Назначение цепочки перераспределений и выполнение перераспределения на величину равную минимальной перевозке в отрицательных узлах цикла.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ***15*** | ***10*** | ***35*** |  |
| ***20*** | ***8***  ***15*** | ***6***  ***5*** | ***2***  ***– 6*** |  |
| ***40*** | ***7***  ***2*** | ***3***  ***5*** | ***5***  ***35*** |  |

**«–»**

**«+»**

**«+»**

**«–»**

1.5. Вычисление для улучшенного в результате перераспределения плана потенциалов строк и столбцов

*ui* + *vj* = *cij*,*u1=0,* *u2= –3,*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ***15*** | ***10*** | ***35*** |  |
| ***20*** | ***8***  ***15*** | ***6*** | ***2***  ***5*** | ***u1= 0*** |
| ***40*** | ***7*** | ***3***  ***10*** | ***5***  ***30*** | ***u2= 3*** |
|  | ***v1=8*** | ***v2=0*** | ***v3=2*** |  |

*u1*+*v1=8****,*** *v1 =8 – u1=8*,

*u1*+*v3=2,**v3=2 – u1= 2,*

*u2*+*v2=3,**u2=5 – v3= 3,*

*u2*+*v3=5.**v2=3 – u2=0*.

1.6. Вычисление потенциалов свободных клеток, оценка оптимальности плана и значения целевой функции

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ***15*** | ***10*** | ***35*** |  |
| ***20*** | ***8***  ***15*** | ***6***  ***6*** | ***2***  ***5*** | ***u1= 0*** |
| ***40*** | ***7***  ***-4*** | ***3***  ***10*** | ***5***  ***30*** | ***u2= 3*** |
|  | ***v1=8*** | ***v2=0*** | ***v 3=2*** |  |

6

***dij* = *cij – ui – vj : d12* =*6 – 0 – 0 = 6, d21* =*7 – 3 – 8= – 4.***

Т.к. ***d21<0,*** план не оптимален,

***f = 8*×*15+2*×*5+3*×*10+5*×*30 = 310*.**

1.7 Назначение цепочки перераспределений и выполнение перераспределения на величину равную минимальной перевозке в отрицательных узлах цикла.

**«–»**

**«+»**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ***15*** | ***10*** | ***35*** |  |
| ***20*** | ***8***  ***15*** | ***6***  ***6*** | ***2***  ***5*** |  |
| ***40*** | ***7***  ***-4*** | ***3***  ***10*** | ***5***  ***30*** |  |
|  |  |  |  |  |

6

**«+»**

**«–»**

1.8. Вычисление потенциалов свободных клеток, оценка оптимальности плана и значения целевой функции

*ui* + *vj* = *cij*,*u1=0,* *u2= –3,*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ***15*** | ***10*** | ***35*** |  |
| ***20*** | ***8*** | ***6*** | ***2***  ***20*** | ***u1= 0*** |
| ***40*** | ***7***  ***15*** | ***3***  ***10*** | ***5***  ***15*** | ***u2= 3*** |
|  | ***v1=4*** | ***v2=0*** | ***v3=2*** |  |

*u1*+*v3=2,**v3 =2 – u1 = 2*,

*u2*+*v1=7,* *u2=5 – v3= 3,*

*u2*+*v2=3,**v1=7 – u2 = 4,*

*u2*+*v3=5.**v2=3 – u2 = 0*.

1.9. Вычисление потенциалов свободных клеток и оценка плана

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ***15*** | ***10*** | ***35*** |  |
| ***20*** | ***8***  ***4*** | ***6***  ***6*** | ***2***  ***20*** | ***u1= 0*** |
| ***40*** | ***7***  ***15*** | ***3***  ***10*** | ***5***  ***15*** | ***u2= 3*** |
|  | ***v1=4*** | ***v2=0*** | ***v3=2*** |  |

***dij* = *cij – ui – vj : d11* =*8 – 0 – 4 = 4, d12* =*6 – 0 – 0 = 6.***

Т.к. ***dij>0,***план оптимальный,

***f = 2×20+7×15+3×10+5×15 = 250 = fmin***

2. Построение плана с использованием «жадного» алгоритма

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | ***15*** | ***10*** | ***35*** |
| ***20*** | ***8*** | ***6*** | ***2***  ***1)20*** |
| ***40*** | ***7***  ***4)15*** | ***3***  ***2)10*** | ***5***  ***3)15*** |

Значение ЦФ такого плана ***f = 2×20+7×15+3×10+5×15 = 250,***

и, следовательно, «жадный» алгоритм приводит к лучшему результату по сравнению с опорным планом, построенным методом северо-западного угла, в данном конкретном случае сразу получается оптимальный план.

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8**

**“Решение транспортной задачи**

**по критерию ВРЕМЕНИ”**

**Цель лабораторной работы:** Закрепление навыков аналитического решения транспортных задач

**Задача:** Дано:

***a1*** и***a2* –** количество продукции в двух пунктах хранения с номерами ***i =1, 2*;**

***b1,b2*** и***b3* –** количество продукции, которое требуется перевезти в три пункта назначения ***j = 1, 2, 3*;**

***zij= tij* (*xij* )** – затраты времени на перевозку продукции из *i*-го пункта хранения в *j* -й пункт назначения.

Задача является сбалансированной**:**



Hайти план перевозок, обеспечивающий минимизацию максимального времени перевозки



(2.1) для опорного плана, построенного методом северо-западного угла, а также (2.2) для опорного плана, полученного с использованием «жадного» алгоритма (с проверкой оптимальности методом знаков).

**Ф О Р М А В Ы Д А Ч И З А Д А Н И Я**

***33) a1* = *20, a2* = *40, b1* = *15, b2* = *10, b3* = *35,***

***z11= 8, z12= 6, z13= 2, z21= 7, z22= 3, z23= 5***

**ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ**

**Задание 51:** ***a1* = *20, a2* = *40, b1* = *15, b2* = *10, b3* = *35,***

***t11= 8, t12= 6, t13= 2, t21= 7, t22= 3, t23= 5***

**2.1. С опорным планом, построенным методом северо-западного угла**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | ***15*** | ***10*** | ***35*** |
| ***20*** | ***8***  ***15*** | ***6***  ***5*** | ***2*** |
| ***40*** | ***7*** | ***3***  ***5*** | ***5***  ***35*** |

2.1.1. Определение для опорного плана вхождения и знаков свободных переменных (СП) в выражение для критериальной переменной (КП) и оценка оптимальности плана

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **2) –** | **3) +** | **5) +** |
| **1) –** | ***8***  ***15*** | ***6***  ***5*** | ***2***  не входит |
| **4) –** | ***7***  ***\_*** | ***3***  ***5*** | ***5***  ***35*** |

КП ***x11 =15 – x21,***

СП ***x13*** (не входит)и ***x21.***

Т.к. ***x21<0,*** план не оптимальный, ***f = t11 = 8***.

***x21 →*** в базисные.

2.1.2. Назначение цепочки перераспределений

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | ***15*** | ***10*** | ***35*** |
| ***20*** | ***8***  ***15*** | ***6***  ***5*** | ***2*** |
| ***40*** | ***7*** | ***3***  ***5*** | ***5***  ***35*** |

**«+»**

**«–»**

**«–»**

**«+»**

2.1.3. Определение в улучшенном в результате перераспределения плане вхождения и знаков свободных переменных в выражение для критериальной переменной и оценка оптимальности плана

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **2) –** | **3) +** | **5) –** |
| **1) –** | ***8***  ***10*** | ***6***  ***10*** | ***2***  ***\_*** |
| **4)+** | ***7***  ***5*** | ***3***  ***+*** | ***5***  ***35*** |

КП ***x11 =10 – x13 +x22,***

СП ***x13*** и ***x22.***

Т.к. ***x13<0,*** план не оптимальный, ***f = t11 = 8***.

***x13 →*** в базисные.

2.1.4. Назначение цепочки перераспределений

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | ***15*** | ***10*** | ***35*** |
| ***20*** | ***8***  ***10*** | ***6***  ***10*** | ***2*** |
| ***40*** | ***7***  ***5*** | ***3*** | ***5***  ***35*** |

**«–»**

**«+»**

**«+»**

**«–»**

2.1.5. Определение в улучшенном в результате перераспределения плане вхождения и знаков свободных переменных в выражение для критериальной переменной, оценка оптимальности плана и значения ЦФ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **2) –** | **5) +** | **3) +** |
| **4) –** | ***8*** | ***6***  ***10*** | ***2***  ***10*** |
| **1) –** | ***7***  ***15*** | ***3***  не входит | ***5***  ***25*** |

КП ***x21 =15,***

СП ***x11*** (заведомо оптимальная)и ***x22***(не входит)***.***

Т.к. нет других СП<0***,*** план оптимальный, ***fmin = t21 = 7***.

**2.2. С опорным планом, построенным с использованием «жадного» алгоритма**

2.2.1. Построение опорного плана

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | ***15*** | ***10*** | ***35*** |
| ***20*** | ***8*** | ***6*** | ***2***  ***1)20*** |
| ***40*** | ***7***  ***4)15*** | ***3***  ***2)10*** | ***5***  ***3)15*** |

Значение ЦФ такого плана ***f = 7*** и, следовательно, «жадный» алгоритм получения опорного плана приводит данном конкретном случае к лучшему результату по сравнению с опорным планом, построенным методом северо-западного угла.

2.2.2. Определение для опорного плана, вхождения и знаков свободных переменных (СП) в выражение для критериальной переменной (КП) и оценка оптимальности плана

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **2) –** | **5) +** | **3) +** |
| **4) –** | ***8*** | ***6***  не входит | **3)►4) *2***  ***20*** |
| **1) –** | ***7***  ***15*** | **1)►5)** ***3***  ***10*** | **1)►3) *5***  ***15*** |

КП ***x21 =15.***

СП ***x11*** (заведомо оптимальная)и ***x12***(не входит)***.***

Т.к. нет других СП<0***,*** план оптимальный, ***fmin = t21 = 7***.

Это второй вариант возможного решения, отличающийся от ранее полученного (цепочкой перераспределений в 4-х ячейках юго-восточного угла таблицы можно прийти к первому варианту решения).